

Matrices minimisant la norme sur $SL_n(\mathbb{R})$

Ref: Gordon, Analyse p. 330+332+341

Lemme: Soient E, F, G des espaces vectoriels normés de dimension finie et $\varphi: E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire

Alors φ est différentiable sur $E \times F$ et :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \forall (h, k) \in E \times F, D\varphi_{(x, y)}(h, k) = \varphi(x, k) + \varphi(h, y)$$

Prop: Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. L'application $\det: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞
 $M \mapsto \det M$

sur $GL_n(\mathbb{R})$ et : $\forall M \in GL_n(\mathbb{R}), \forall H \in GL_n(\mathbb{R}), D\det_M(H) = \text{Tr}({}^t \text{com}(M) H)$.

Prop: On munit $GL_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2: M = (m_{ij}) \mapsto \left(\sum_{i,j=1}^n m_{ij}^2 \right)^{1/2}$

Alors $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

Lemme: Soient E, F, G des espaces vectoriels normés de dimension finie

et $\varphi: E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire

Alors φ est différentiable sur $E \times F$ et :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \forall (h, k) \in E \times F, \quad D\varphi_{(x, y)}(h, k) = \varphi(x, k) + \varphi(h, y)$$

Prouve: Soit $(x, y) \in E \times F$ fixé.

Pour tout $(h, k) \in E \times F$, par bilinéarité de φ on a :

$$\varphi(x+h, y+k) = \varphi(x, y) + \varphi(x, k) + \varphi(h, y) + \varphi(h, k)$$

on pose $L: (h, k) \mapsto \varphi(x, k) + \varphi(h, y)$

φ étant bilinéaire, L est linéaire et continue (car sur $E \times F$ dim finie)

et comme φ est bilinéaire sur $E \times F$ qui sont de dimension finie

alors φ est continue et donc : il existe $C > 0$, $\|\varphi(h, k)\|_G \leq C \|h\|_E \|k\|_F$

on est en dim finie donc toutes les normes sont équivalentes $\leq \underbrace{C \|h, k\|_{E \times F}^2}_{= o(\|h, k\|)}$

on peut prendre par exemple $\|(h, k)\|_{E \times F} = \sup(\|h\|_E, \|k\|_F) = o(\|(h, k)\|)$

$$\text{Ainsi, } \varphi(x+h, y+k) = \varphi(x, y) + L(h, k) + o(\|(h, k)\|_{E \times F})$$

et donc φ est différentiable sur $E \times F$ et on a :

$$D\varphi_{(x, y)}(h, k) = \varphi(x, k) + \varphi(h, y).$$

Prop: Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. L'application $\det: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$
 $M \mapsto \det M$

sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et: $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), D \det_M(H) = \text{Tr}({}^t \text{com}(M) H)$.

Preuve: Le déterminant d'une matrice est un polynôme en ses coefficients, donc $M \mapsto \det(M)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$, et tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a par n -linéarité du déterminant que:

$$\begin{aligned} \det(M + \epsilon E_{ij}) &= \begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{ni} & m_{ij} + \epsilon & m_{nj} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{nn} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix} = \det(M) + \begin{vmatrix} m_{11} & \dots & 0 & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{ni} & \dots & 0 & \epsilon & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{nn} & \dots & 0 & \dots & m_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \det(M) + \epsilon \begin{vmatrix} m_{11} & \dots & 0 & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{ni} & \dots & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{nn} & \dots & 0 & \dots & m_{nn} \end{vmatrix} = \det(M) + \epsilon (\text{com}(M))_{ij} \\ &= (-1)^{i+j} \Delta_{ij} \quad (\text{on développe avec le } 1) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{\partial \det}{\partial E_{ij}}(M) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \neq 0}} \frac{\det(M + \epsilon E_{ij}) - \det(M)}{\epsilon} = (\text{com}(M))_{ij}$$

Ainsi, pour tout $M = (m_{ij})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a:

$$\begin{aligned} D \det_M(H) &= \sum_{i,j=1}^n h_{ij} \frac{\partial \det}{\partial E_{ij}}(M) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n h_{ij} ({}^t \text{com}(M))_{ji} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (H {}^t \text{com}(M))_{ii} = \text{Tr}(H {}^t \text{com}(M)). \end{aligned}$$

Req: Si $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, ${}^t \text{com}(M) = \det(M) M^{-1}$

Donc $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), D \det_M(H) = \det(M) \text{Tr}(M^{-1} H)$.

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \mid {}^t M M = I_n \text{ et } \det M = 1\}$$

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$$

Prop: On munit $GL_n(\mathbb{R})$ de la norme $\| \cdot \|_2 : M = (m_{ij}) \mapsto \left(\sum_{i,j=1}^n m_{ij}^2 \right)^{1/2}$

Alors $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

Preuve: Pour tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_2^2 = \text{Tr}({}^t M M)$

$$\begin{aligned} \text{Tr}({}^t M M) &= \sum_{i=1}^n p_{ii} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n {}^t m_{ij} m_{ji} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{ji}^2 \right) \\ &= \|M\|_2^2 \end{aligned}$$

On veut donc minimiser la fonction f définie sur $GL_n(\mathbb{R})$ par

$f(M) = \text{Tr}({}^t M M)$ sous la contrainte $g(M) = 0$ avec $g(M) = \det(M) - 1$.

L'application f est une forme quadratique et g est une forme multilinéaire sur un espace vectoriel de dimension finie, donc f et g sont continues.

Par ailleurs, $SL_n(\mathbb{R}) = g^{-1}(0)$ donc $SL_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $GL_n(\mathbb{R})$

et ainsi, le minimum de f sur $SL_n(\mathbb{R})$ est atteint en un point

(*) $A \in SL_n(\mathbb{R})$. (D'après tout ce de dim finie E , la distance d de $\{0\}$ à un fermé F de E est toujours atteinte, car elle est atteinte sur le compact $K = \{x \in F \mid \|x\| \leq d+1\}$ et $\|x\| > d+1$ en dehors de K).

D'après la proposition précédente, on a $Dg_A(H) = \text{Tr}(A^{-1}H)$

$$\text{si } H = A \Rightarrow Dg_A(A) = \text{Tr}(A^{-1}A) = \text{Tr}(I_n) = n \neq 0$$

Donc Dg_A est non nulle et d'après le théorème des extrema

on a, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Df_A = \lambda Dg_A$

De plus, d'après la somme, $Df_A(H) = 2 \text{Tr}({}^t A H)$

$$f(M) = \tilde{f}(M, M)$$

$\nwarrow$ forme polarisée associée à f .

$$Df_A(H) = D\tilde{f}_{(A,A)}(H, H) = \text{Tr}({}^t A H) + \underbrace{\text{Tr}({}^t H A)}_{= \text{Tr}({}^t A H)} = 2 \text{Tr}({}^t A H).$$

Donc $2 \operatorname{Tr}({}^t A H) = \lambda \operatorname{Tr}(A^{-1} H)$, soit $\operatorname{Tr}((2 {}^t A - \lambda A^{-1}) H) = 0$

On a alors $2 {}^t A = \lambda A^{-1}$ et donc $2 {}^t A A = \lambda I_n$

En appliquant le déterminant : $\det(2 {}^t A A) = \det(\lambda I_n)$

$$\det({}^t A A) = \underbrace{\det({}^t A)}_{=1} \underbrace{\det(A)}_{=1} \Rightarrow 2^n = \lambda^n$$

car $A \in \operatorname{SO}_n(\mathbb{R})$

Or, ${}^t A A$ est positive

Def : $M \in \operatorname{Sym}(\mathbb{R})$ est positive si $\forall x \in \mathcal{C}_{n,1}^b(\mathbb{R})$, ${}^t x M x \geq 0$.

$${}^t x {}^t A A x = {}^t (A x) A x = \|A x\|^2 \geq 0.$$

$\hat{=}$ norme sur $\mathbb{R}^n$.

Donc $n \lambda = 2 \underbrace{\operatorname{Tr}({}^t A A)}_{\geq 0} \geq 0$ et donc $\lambda \geq 0$
 $\Rightarrow 0$ car ${}^t A A$ positive

et ainsi comme $2^n = \lambda^n$, on a $\lambda = 2$

On a alors ${}^t A A = I_n$, et comme $\det(A) = 1$, $A \in \operatorname{SO}_n(\mathbb{R})$

et le minimum vaut $f(A) = \operatorname{Tr}({}^t A A) = \operatorname{Tr}(I_n) = n$.

Réciproquement, pour tout $M \in \operatorname{SO}_n(\mathbb{R})$, $\|H\|^2 = \operatorname{Tr}({}^t H H) = \operatorname{Tr}(I_n) = n$.

(*) on cherche à tel que $f(A) = \inf_{H \in \operatorname{SO}_n(\mathbb{R})} \|H\|^2$

$$\text{c'est } \|A \cdot 0\|^2 = \inf_{H \in \operatorname{SO}_n(\mathbb{R})} \|H \cdot 0\|^2 = d(0, \operatorname{SO}_n(\mathbb{R})) =$$